Løsningsforslag – ST1101 Sannsynlighetsregning
Lørdag 5. juni 2004-06-08

Oppgave 1:

Antall forskjellige juryer: $\binom{20}{12} = \underline{\underline{125970}}$

P(minst 40 % av begge kjønn) = $\dfrac{\#\, gunstige}{\#\, mulige}$

#gunstige: For å være minst 40 % av 12 må det være minst 5 personer av hvert kjønn. Mulige sammensetninger av (Kvinner, Menn) blir da (5,7), (6,6) eller (7,5).

$$\binom{10}{5}\binom{10}{7} + \binom{10}{6}\binom{10}{6} + \binom{10}{7}\binom{10}{5} = 104580$$

P(minst 40 % av begge kjønn) = $\dfrac{104580}{125970} \approx \underline{\underline{0.83}}$

Oppgave 2:

a) X = rørlengde ~ N(25,1).

$$P(24 \le X \le 24{,}5) = P\left(\frac{24-25}{1} \le Z \le \frac{24{,}5-25}{1}\right) = P(-1 \le Z \le -0{,}5) = 0{,}3085 - 0{,}1587 \approx \underline{\underline{0{,}15}}$$

La $Y = \sum_{i=1}^{10} X_i \sim N(10 \cdot 25, 10 \cdot 1)$

$$P(Y < 245) = P\left(Z < \frac{245-250}{\sqrt{10}}\right) = P(Z < -1{,}58) \approx \underline{\underline{0{,}057}}$$

b) La T= # rør med lengde mellom 24 og 24,5 m. T ~ Binomisk(n=10, p=0,15).

$$P(Y \ge 2) = 1 - P(Y \le 1)$$

$$= 1 - \left[\binom{10}{0} 0{,}15^0 (1-0{,}15)^{10} + \binom{10}{1} 0{,}15^1 (1-0{,}15)^9\right] = 1 - \left[0{,}197 + 0{,}347\right] \approx \underline{\underline{0{,}456}}$$

c) $$P(X \le 24{,}5 \mid X \ge 24) = \frac{P(24 \le X \le 24{,}5)}{P(X \ge 24)} = \frac{0{,}15}{1-0{,}1587} = \underline{\underline{0{,}178}}$$

$$f_T(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} \frac{1}{\left[1 - \int_{-\infty}^{24} f_X(x)\,dx\right]} = \begin{cases} \dfrac{1}{0{,}8413} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(t-25)^2}, & t \ge 24 \\ 0, & \textit{ellers} \end{cases}$$

Oppgave 3:

a) X ~ Poisson(λ=14,7)

$$P(X=10)=\frac{e^{-14,7}\cdot 14,7^{10}}{10!}=\underline{\underline{0,054}}$$

b) W ~ Gamma(r=100, λ=14,7)

$$E(W)=\frac{r}{\lambda}=\underline{\underline{6,8}} \qquad Var(W)=\frac{r}{\lambda^2}=\underline{\underline{0,46}}$$

c) W kan betraktes som sum av 100 eksponentialfordelte variable. W er da tilnærmet normalfordelt iflg. sentralgrenseteoremet.

$$P(5\le W\le 7)=P\left(\frac{5-6,8}{\sqrt{0,46}}\le Z\le\frac{7-6,8}{\sqrt{0,46}}\right)=P(-2,65\le Z\le 0,29)=0,6141-0,0040\approx\underline{\underline{0,61}}$$

Oppgave 4:

a) $$E(X)=M_X^{(1)}(t=0)=\frac{45}{120}+\frac{20\cdot 2}{120}+\frac{10\cdot 3}{120}+\frac{1\cdot 5}{120}=\underline{\underline{1}}$$

$$Var(X)=M_X^{(2)}(t=0)-\left(E(X)\right)^2=\frac{45}{120}+\frac{20\cdot 4}{120}+\frac{10\cdot 9}{120}+\frac{1\cdot 25}{120}-1=\underline{\underline{1}}$$

b) $$P(X\ge 1)=1-P(X=0)=1-\frac{44}{120}=\frac{76}{120}=\frac{19}{30}\approx\underline{\underline{0.63}}$$